BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2014

УДК 517.977

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЯЗАННЫМИ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СТЕРЖНЯ

В.Б.НАЗАРОВА
Бакинский Государственный Университет
vera_nazarova@rambler.ru

В данной работе рассматривается задача оптимального управления связанными изгибно-крутильными колебаниями стержня, причем уравнения колебаний состоят из двух дифференциальных уравнений четвертого порядка. Доказывается существование и единственность решения рассматриваемой краевой задачи и теорема существования оптимального управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, стрежень, изгибно-крутильные колебания.

Как известно, многие колебательные и волновые процессы описываются гиперболическими уравнениями. Поэтому среди задач оптимального управления, задачи описываемые такими уравнениями имеют важное значение. Существует большое количество задач оптимального управления для гиперболических уравнений, например, см. [1,2,3,4]. Отметим, что можно привести ряд физических процессов, которые приводят к дифференциальным уравнениям четвертого порядка: задачи о колебании стержней, пластин, камертона, расчета устойчивости вращающихся валов, изучения вибраций судов и др. [5]. Поэтому постановка и изучение задач оптимального управления для гиперболических уравнений четвертого порядка является актуальной.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим колебания стержня $[6,7]$, описываемые системой двух дифференциальных уравнений в области $Q=\{0<x<l, 0<t<T\}$

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\rho Ae\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=f_1(x,t,y,\theta,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial\theta}{\partial x},\upsilon), \qquad (1)$$

$$EC_\omega\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4}-GC\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\rho Ae\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\rho(I+Ae^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=f_2(x,t,y,\theta,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial\theta}{\partial x},\upsilon) \quad (2)$$

с начальными условиями

$$y(x,0)=y_0(x),\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=y_1(x),\ \theta(x,0)=\theta_0(x),\frac{\partial\theta(x,0)}{\partial t}=\theta_1(x),\ \ 0\le x\le l \qquad (3)$$

и граничными условиями

$$y(0,t)=0,\ y(l,t)=0,\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=0,\frac{\partial y(l,t)}{\partial x}=0, \qquad (4)$$

$$\theta(0,t)=0,\theta(l,t)=0,\frac{\partial\theta(0,t)}{\partial x}=0,\frac{\partial\theta(l,t)}{\partial x}=0,\ \ 0\le t\le T, \qquad (5)$$

где $l>0, T>0$ -заданные числа, $y(x,t)$ - поперечное перемещение, $\theta(x,t)$ - угол поворота поперечного сечения стержня, E -модуль Юнга, I - полярный момент инерции поперечного сечения относительно его центра тяжести, ρ - плотность материала стержня, A - площадь поперечного сечения, e - расстояние от центра тяжести до центра кручения, C_ω - секториальный момент инерции поперечного сечения, G - модуль сдвига, C - геометрическая жесткость свободного кручения, EC_ω -жесткость изгибного кручения, GC - жесткость свободного кручения, $\upsilon(x,t)$ -управляющая функция. За класс допустимых управлений U_{ad} берем множество измеримых и ограниченных на Q функций $\upsilon(x,t)$,таких, что почти при всех $(x,t)\in Q$ значения этих функций принадлежат отрезку $[\alpha,\beta]$,где α,β - заданные числа.

Ставится следующая задача: найти такое допустимое управление $\upsilon(x,t)$ из U_{ad}, которое вместе с соответствующим решением $(y(x,t),\theta(x,t))$ задачи $(1)-(3)$ доставляет минимум функционалу

$$J(\upsilon)=\iint\limits_Q f_0\left(x,t,y(x,t),\theta(x,t),\frac{\partial y(x,t)}{\partial x},\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x},\upsilon(x,t)\right)dxdt. \qquad (6)$$

Задачу оптимального управления $(1)-(6)$ назовем просто задачей $(1)-(6)$. Под обобщенным решением задачи $(1)-(5)$ для заданного допустимого управления $\upsilon(x,t)$ понимается вектор-функция

$\left(y(x,t),\theta(x,t)\right)\in W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$, компоненты которой имеют следы $y(\cdot,t),\frac{\partial y(\cdot,t)}{\partial t},\theta(\cdot,t),\frac{\partial\theta(\cdot,t)}{\partial t}\in L_2[0,l]$ при всех $t\in[0,T],y(x,\cdot),\frac{\partial y(x,\cdot)}{\partial x},\theta(x,\cdot),\frac{\partial\theta(x,\cdot)}{\partial x}\in L_2[0,T]$ при всех $x\in[0,l]$ и удовлетворяющие условиям $(3)-(5)$ в смысле равенства соответствующих следов и интегральным тождествам

$$\iint_Q\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\rho Ae\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)dxdt-\int_0^l\rho Ay_1(x)\psi_1(x,0)dx+\int_0^l\rho Ae\theta_1(x)\psi_1(x,0)dx=$$

$$=\iint_Q f_1\left(x,t,y,\theta,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial\theta}{\partial x},\upsilon\right)\psi_1 dxdt,\qquad(7)$$

$$\iint_Q\left(EC_\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}-GC\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\psi_2+\rho Ae\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}-\rho(I+Ae^2)\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)dxdt+\int_0^l\rho Aey_1(x)\psi_2(x,0)dx-$$

$$-\int_0^l\rho(I+Ae^2)\theta_1(x)\psi_2(x,0)dx=\iint_Q f_2\left(x,t,y,\frac{\partial y}{\partial x},\theta,\frac{\partial\theta}{\partial x},\upsilon\right)\psi_2 dxdt,\qquad(8)$$

при всех $\psi_1=\psi_1(x,t)\in W_2^{2,1}(Q),\psi_2=\psi_2(x,t)\in W_2^{2,1}(Q)$,

$$\psi_1(0,t)=\psi_1(l,t)=0,\frac{\partial\psi_1(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi_1(l,t)}{\partial x}=0,\psi_1(x,T)=0,$$

$$\psi_2(0,t)=\psi_2(l,t)=0,\frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi_2(l,t)}{\partial x}=0,\psi_2(x,T)=0.$$

В дальнейшем мы при естественных условиях на данные краевой задачи $(1)-(5)$ будем доказывать теорему существования и единственности решения этой задачи. Отметим, что такое решение обладает свойством

$$y,\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x},\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\in C([0,T],L_2[0,l]).$$

Допустимое управление $\upsilon_0(x,t)$, являющееся решением задачи $(1)-(6)$ называется оптимальным управлением, а тройка $\left(y_0(x,t),\theta_0(x,t),\upsilon_0(x,t)\right)$ – оптимальной тройкой, где $\left(y_0(x,t),\theta_0(x,t)\right)$ – решение краевой задачи $(1)-(5)$, соответствующее допустимому управлению.

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

1. $y_0\in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),y_1\in L_2(0,l),\theta_0\in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\theta_1\in L_2(0,l)$;

2. Функции $f_i(x,t,y,\theta,p,q,\upsilon),i=0,1,2$ непрерывны на $\bar{Q}\times R^4\times[\alpha,\beta]$. Функции $f_i(x,t,y,\theta,p,q,\upsilon),i=1,2$ по (y,θ,p,q) удовлетворяют условию Липшица равномерно относительно $(x,t)\in\bar{Q}$ и $\upsilon\in[\alpha,\beta]$; функция

$f_0(x,t,y,\theta,p,q,\upsilon)$ удовлетворяет условию роста $|f_0(x,t,y,\theta,p,q,\upsilon)|\le a_0+b_0\left[|y|^2+|\theta|^2+|p|^2+|q|^2\right]$, где $a_0,b_0=const>0$;

3. Для каждой точки $(x,t,y,\theta,p,q)\in\bar{Q}\times R^4$ множество

$$R^+(x,t,y,\theta,p,q)=\{(\eta,\xi_1,\xi_2)\in R^3|\eta\ge f_0(x,t,y,\theta,p,q,\upsilon),$$

$$\xi_1=f_1(x,t,y,\theta,p,q,\upsilon),\xi_2=f_2(x,t,y,\theta,p,q,\upsilon),\upsilon\in[\alpha,\beta]\}$$

замкнуто и выпукло в R^3.
Эти условия назовем «условие А».

§2. Вопрос существования и единственности решения краевой задачи $(1)-(5)$.

Теорема1: При выполнении первых двух условий «условие А» краевая задача $(1)-(5)$ для каждого $\upsilon(x,t)\in U_{ad}$ имеет единственное решение. А для совокупности решений задачи $(1)-(5)$, соответствующих всем допустимым управлениям, справедлива оценка

$$\|y\|^2_{W_2^{2,1}(Q)}+\|\theta\|^2_{W_2^{2,1}(Q)}\le const. \tag{9}$$

Доказательство. Для доказательства существования решения применим метод Фаедо-Галеркина.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ фундаментальная система в $\overset{0}{W}{}_2^2[0,l]$ и

$(\varphi_k,\varphi_m)\equiv\int_0^l\varphi_k(x)\varphi_m(x)dx=\delta_k^m=\begin{cases}1,k=m,\\0,k\ne m\end{cases}$. Приближенные решения

$(y^N(x,t),\theta^N(x,t))$ ищем в виде

$y^N(x,t)=\sum_{k=1}^N C_{1k}^N(t)\varphi_k(x),\theta^N(x,t)=\sum_{k=1}^N C_{2k}^N(t)\varphi_k(x)$ из следующих соотношений

$$\rho A\int_0^l\frac{\partial^2y^N}{\partial t^2}\varphi_l(x)dx+EI\int_0^l\frac{\partial^2y^N}{\partial x^2}\frac{d^2\varphi_l}{dx^2}dx-\rho Ae\int_0^l\frac{\partial^2\theta^N}{\partial t^2}\varphi_l(x)dx=$$
$$=\int_0^l f_1\left(x,t,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial\theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\varphi_l(x)dx, \tag{10}$$

$$\rho(I+Ae^2)\int_0^l\frac{\partial^2\theta^N}{\partial t^2}\varphi_l(x)dx+EC_\omega\int_0^l\frac{\partial^2\theta^N}{\partial x^2}\frac{d^2\varphi_l(x)}{dx^2}dx-GC\int_0^l\frac{\partial^2\theta^N}{\partial x^2}\varphi_l(x)dx-\rho Ae\int_0^l\frac{\partial^2y^N}{\partial t^2}\varphi_l(x)dx=$$

$$= \int_0^l f_2\left(x, t, y^N, \theta^N, \frac{\partial y^N}{\partial x}, \frac{\partial \theta^N}{\partial x}, \upsilon\right)\varphi_l(x)dx \quad l = 1,2,..., N, \tag{11}$$

и
$$C_{1k}^N(0) = \alpha_k^N, \frac{d}{dt}C_{1k}^N(t)\Big|_{t=0} = \int_0^l y_1(x)\varphi_k(x)dx, \tag{12}$$

$$C_{2k}^N(0) = \beta_k^N, \frac{d}{dt}C_{2k}^N(t)\Big|_{t=0} = \int_0^l \theta_1(x)\varphi_k(x)dx, \tag{13}$$

где α_k^N и β_k^N суть коэффициенты сумм $y_0^N(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^N \varphi_k(x), \theta_0^N(x) = \sum_{k=1}^N \beta_k^N \varphi_k(x)$, аппроксимирующих при $N \to \infty$ функции $y_0(x), \theta_0(x)$ в норме $\overset{0}{W}{}_2^2[o,l]$. Равенства (10) и (11) являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по t для неизвестных $C_{1k}^N(t)$ и $C_{2k}^N(t)$, $k = 1,..., N$, разрешенной относительно $\frac{d^2 C_{1k}(t)}{dt^2}$ и $\frac{d^2 C_{2k}(t)}{dt^2}$.

Эта система однозначно разрешима при начальных данных (12) и (13), причем $\frac{d^2 C_{1k}(t)}{dt^2} \in L_2(0,T), \frac{d^2 C_{2k}(t)}{dt^2} \in L_2(0,T)$.

Покажем, что для $\left(y^N(x,t), \theta^N(x,t)\right)$ справедлива оценка

$$\int_0^l \left[\left(y^N(x,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\theta^N(x,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta^N(x,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta^N(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 \theta^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx \le C\left[\|y_0\|_{W_2^2(o,l)}^2 + \|y_1\|_{L_2(o,l)}^2 + \|\theta_0\|_{W_2^2(o,l)}^2 + \|\theta_1\|_{L_2(o,l)}^2 + \|a_{1\upsilon}\|_{L_\infty(Q)}^2 + \|a_{2\upsilon}\|_{L_\infty(Q)}^2\right],$$

$$\forall t \in [0,T], \forall \upsilon \in U_{dd}, \tag{14}$$

где $a_{i\upsilon}(x,t) = \left|f_i(x,t,0,0,0,0,\upsilon(x,t))\right|, i = 1,2.$

Здесь и в дальнейшем через C будем обозначать различные постоянные, не зависящие от $\upsilon(x,t)$ и от оцениваемых величин. Действительно, умножая каждое из равенств (10) и (11) на свое $\frac{dC_{1l}^N(t)}{dt}$ и $\frac{dC_{2l}^N(t)}{dt}$ и суммируя по l от 1 до N, придем к равенствам

$$\rho A\int_0^l \frac{\partial^2 y^N}{\partial t^2}\frac{\partial y^N}{\partial t}dx + EI\int_0^l \frac{\partial^2 y^N}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y^N}{\partial x^2\partial t}dx - \rho Ae\int_0^l \frac{\partial^2 \theta^N}{\partial t^2}\frac{\partial y^N}{\partial t}\varphi_k dx =$$

$$= \int_0^l f_1\left(x,t,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial \theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\frac{\partial y^N}{\partial t}dx,$$

$$\rho(I+Ae^2)\int_0^l \frac{\partial^2 \theta^N}{\partial t^2}\frac{\partial \theta^N}{\partial t}dx + EC_\omega\int_0^l \frac{\partial^2 \theta^N}{\partial x^2}\frac{\partial^3 \theta^N}{\partial x^2\partial t}dx - GC\int_0^l \frac{\partial^2 \theta^N}{\partial x^2}\frac{\partial \theta^N}{\partial t}dx - \rho Ae\int_0^l \frac{\partial^2 y^N}{\partial t^2}\frac{\partial \theta^N}{\partial t}dx =$$

$$= \int_0^l f_2\left(x,t,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial \theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\frac{\partial \theta^N}{\partial t}dx.$$

Суммируя эти равенства, отсюда с помощью простых преобразований можно получить:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l\left[\rho A\left(\frac{\partial y^N}{\partial t}\right)^2 + EI\left(\frac{\partial^2 y^N}{\partial x^2}\right)^2 + \rho\left(I+Ae^2\right)\left(\frac{\partial \theta^N}{\partial t}\right)^2 + GC\left(\frac{\partial \theta^N}{\partial x}\right)^2 + EC_W\left(\frac{\partial^2 \theta^N}{\partial x^2}\right)^2\right]dx -$$

$$-\frac{d}{dt}\int_0^l \rho Ae\frac{\partial y^N}{\partial t}\frac{\partial \theta^N}{\partial t}dx = \int_0^l\left[f_1\left(x,t,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial \theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\frac{\partial y^N}{\partial t} +\right.$$

$$\left. + f_2\left(x,t,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial \theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\frac{\partial \theta^N}{\partial t}\right]dx.$$

Интегрируя по t от 0 до t, отсюда получим

$$\int_0^l\left[\rho A\left(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial t}\right)^2 + EI\left(\frac{\partial^2 y^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 + \rho\left(I+Ae^2\right)\left(\frac{\partial \theta^N(x,t)}{\partial t}\right)^2 + GC\left(\frac{\partial \theta^N(x,t)}{\partial x}\right)^2 + EC_W\left(\frac{\partial^2 \theta^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx -$$

$$-2\int_0^l \rho Ae\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \theta^N(x,t)}{\partial t}dx = \int_0^l\left[\rho A\left(\frac{\partial y^N(x,0)}{\partial t}\right)^2 + EI\left(\frac{\partial^2 y^N(x,0)}{\partial x^2}\right)^2 + \rho\left(I+Ae^2\right)\left(\frac{\partial \theta^N(x,0)}{\partial t}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + GC\left(\frac{\partial \theta^N(x,0)}{\partial x}\right)^2 + EC_W\left(\frac{\partial^2 \theta^N(x,0)}{\partial x^2}\right)^2\right] - 2\int_0^l \rho Ae\frac{\partial y^N(x,0)}{\partial t}\frac{\partial \theta^N(x,0)}{\partial t}dx +$$

$$+2\int_0^t\int_0^l\left[f_1\left(x,s,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial \theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\frac{\partial y^N(x,s)}{\partial t} + f_2\left(x,s,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial \theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\frac{\partial \theta^N(x,s)}{\partial t}\right]dxds.$$

В силу элементарных неравенств $2ab \le a^2 + b^2$ и $-2ab \ge -\left(a^2+b^2\right)$, и учитывая начальные условия (12), (13), из последнего равенства имеем

$$
\begin{aligned}
&(\rho A-\rho Ae)\int_0^l\left(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial t}\right)^2dx+\\
&+\left(\rho\left(I+Ae^2\right)-\rho Ae\right)\int_0^l\left(\frac{\partial \theta^N(x,t)}{\partial t}\right)^2dx+EI\int_0^l\left(\frac{\partial^2 y^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2dx+GC\int_0^l\left(\frac{\partial^2 \theta^N(x,t)}{\partial x}\right)^2dx+\\
&+EC_\omega\int_0^l\left(\frac{\partial^2 \theta^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2dx\le C\int_0^l\left[y_1^2(x)+\left(\frac{d^2y_0(x)}{dx^2}\right)^2+\theta_1^2(x)+\left(\frac{d\theta_0(x)}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2\theta_0(x)}{dx^2}\right)^2\right]dx+\\
&+\int_0^t\int_0^l\left|f_1\left(x,s,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial \theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\right|^2dxds+\\
&+\int_0^t\int_0^l\left(\frac{\partial y^N(x,s)}{\partial t}\right)^2dxds+\int_0^t\int_0^l\left|f_2\left(x,s,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial \theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\right|^2dxds+\\
&+\int_0^t\int_0^l\left(\frac{\partial \theta^N(x,s)}{\partial t}\right)^2dxds.
\end{aligned}\tag{15}
$$

Пусть, $0<e<1$ и $I+Ae(e-1)>0$. Тогда учитывая, что функции $f_i(t,x,y,\theta,p,q,\upsilon)$ $(i=1,2)$ по аргументам (y,θ,p,q) удовлетворяют условию Липшица, из неравенства (15) получим

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l\left[\left(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \theta^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \theta^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx\le\\
&\le C\int_0^l\left[y_1^2(x)+\theta_1^2(x)+\left(\frac{d^2y_0(x)}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d\theta_0(x)}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2\theta_0(x)}{dx^2}\right)^2\right]dx+\\
&+C\int_0^t\int_0^l\left[\left(y^N(x,s)\right)^2+\left(\theta^N(x,s)\right)^2+\left(\frac{\partial y^N(x,s)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta^N(x,s)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y^N(x,s)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta^N(x,s)}{\partial t}\right)^2\right]dxds+\\
&+C\int_0^t\int_0^l\left[\left|f_1(x,t,0,0,0,0,\upsilon(x,t))\right|^2+\left|f_2(x,t,0,0,0,0,\upsilon(x,t))\right|^2\right]dxds.
\end{aligned}
$$

Учитывая эквивалентность норм в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^2(o,l)$ и усиливая правую часть неравенства имеем

$$
\int_0^l\left[\left(y^N(x,t)\right)^2+\left(\theta^N(x,t)\right)^2+\left(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\right.
$$

$$+\left(\frac{\partial^2 y^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\theta^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\Bigg]dx\le C\int_0^l\Bigg[(y_0(x))^2+(\theta_0(x))^2+(y_1(x))^2+(\theta_1(x))^2+\left(\frac{dy_0(x)}{dx}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{d\theta_0(x)}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2 y_0(x)}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\theta_0(x)}{dx^2}\right)^2\Bigg]dx+$$

$$+C\int_0^t\int_0^l\Bigg[(y^N(x,s))^2+(\theta^N(x,s))^2+\left(\frac{\partial y^N(x,s)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta^N(x,s)}{\partial t}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\partial y^N(x,s)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta^N(x,s)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y^N(x,s)}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\theta^N(x,s)}{\partial x^2}\right)^2\Bigg]dxds+$$

$$+C\int_0^t\int_0^l\Big[|f_1(x,t,0,0,0,0,\upsilon(x,t))|^2+|f_2(x,t,0,0,0,0,\upsilon(x,t))|^2\Big]dxds.$$

Применяя лемму Гронуолла $[8]$, из этого неравенства получаем

$$\int_0^l\Bigg[(y^N(x,t))^2+(\theta^N(x,t))^2+\left(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 y^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\theta^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\Bigg]dx\le$$

$$\le C\Big[\|y_0\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|\theta_0\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|y_1\|^2_{L_2(0,l)}+\|\theta_1\|^2_{L_2(0,l)}++\|a_{1\upsilon}\|^2_{L_\infty(Q)}+\|a_{2\upsilon}\|^2_{L_\infty(Q)}\Big]$$

$\forall t\in[0,T],\forall\upsilon\in U_{ad}$, где $a_{i\upsilon}(x,t)=|f_i(x,t,0,0,0,0,\upsilon(x,t))|, i=1,2.$

Последнее неравенство является неравенством (14). Интегрируя последнее неравенство по t имеем

$$\|y^N\|^2_{W_2^{2,1}(Q)}+\|\theta^N\|^2_{W_2^{2,1}(Q)}\le const. \qquad (16)$$

Благодаря (16) из последовательности $\{y^N,\theta^N\}, N=1,2...,$ можно выбрать последовательность (за которой мы сохраним то же обозначение), сходящуюся слабо в $W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$ и равномерно по $t\in[0,T]$ в норме $L_2(0,l)\times L_2(0,l)$ к некоторому элементу $(y,\theta)\in W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$. Покажем, что (y,θ) есть обобщенное решение задачи $(1)-(5)$. Начальные условия $y|_{t=0}=y_0(x)$ и $\theta|_{t=0}=\theta_0(x)$ будут выполнены в силу только что отмеченной сходимости $y^N(x,t)$ к $y(x,t)$ и $\theta^N(x,t)$ к $\theta(x,t)$ и того, что $y^N(x,0)\to y_0(x)$ в $L_2(0,l),\theta^N(x,0)\to\theta_0(x)$ в $L_2(0,l)$. Для доказательства же справедливости тождеств (7) и (8) для $(y(x,t),\theta(x,t))$ поступаем следующим образом. Умножим каждое из соотношений (10) и (11) на свою функцию $d_l^1(t)\in W_2^1(0,T), d_l^1(T)=0$ и $d_l^2(t)\in W_2^1(0,T)$, $d_l^2(T)=0$, затем полученные равенства просуммируем по всем l от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T. После этого в некоторых слагаемых проведем интегрирование по частям, перенося $\frac{\partial}{\partial t}$ с y^N и θ^N на $\psi_1(x,t)=\sum_{l=1}^{N} d_l^1(t)\varphi_l(x)$ и $\psi_2(x,t)=\sum_{l=1}^{N} d_l^2(t)\varphi_l(x)$. Это даст тождества

$$\iint_Q\left(EI\frac{\partial^2 y^N}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial y^N}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\rho Ae\frac{\partial\theta^N}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)dxdt-$$

$$-\int_0^l\rho A\frac{\partial y^N}{\partial t}\psi_1\Big|_{t=0}dx+\int_0^l\rho Al\frac{\partial\theta^N}{\partial t}\psi_1\Big|_{t=0}dx=$$

$$=\iint_Q f_1\left(x,t,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial\theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\psi_1 dxdt, \tag{17}$$

$$\iint_Q\left(EC_\omega\frac{\partial^2\theta^N}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}-GC\frac{\partial^2\theta^N}{\partial x^2}\psi_2+\rho Ae\frac{\partial y^N}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}-\rho(I+Ae^2)\frac{\partial\theta^N}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)dxdt+$$

$$+\int_0^l\rho Ae\frac{\partial y^N}{\partial t}\Big|_{t=0}dx-$$

$$-\int_0^l\rho\left(I+Ae^2\right)\frac{\partial\theta^N}{\partial t}\psi_2\Big|_{t=0}dx=\iint_Q f_2\left(x,t,y^N,\theta^N,\frac{\partial y^N}{\partial x},\frac{\partial\theta^N}{\partial x},\upsilon\right)\psi_2 dxdt. \tag{18}$$

справедливые при $\forall\psi_1(x,t)$ вида $\sum_{l=1}^{N} d_l^1(t)\varphi_l(x)$ и $\forall\psi_2(x,t)$ вида $\sum_{l=1}^{N} d_l^2(t)\varphi_l(x)$. Множество таких $\psi_1(x,t)$ и $\psi_2(x,t)$ обозначим через $\Re_N^1$ и $\Re_N^2$, соответственно.

В силу теорем о компактности вложений $[9]$ при $N\to\infty$ имеем

$$y^N\to y,\theta^N\to\theta \quad \text{равномерно в } C(\overline{Q}), \tag{19}$$

$$\frac{\partial y^N}{\partial x}\to\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial\theta^N}{\partial x}\to\frac{\partial\theta}{\partial x} \quad \text{сильно в } L_2(Q). \tag{20}$$

Поскольку $y^N\to y,\theta^N\to\theta$ слабо в $W_2^{2,1}(Q)$ при $N\to\infty$ (21)

и в силу условий на функции $f_i(t,x,y,\theta,p,q,\upsilon)$, $i=1,2$, они имеют линейный рост по (y,θ,p,q), учитывая (19),(20),(21) можно перейти к пределу в (17) и (18) по выбранной выше подпоследовательности при закрепленном $\psi^1(x,t)$ и $\psi^2(x,t)$ из какого-либо $\Re^1_{N_i}$ и $\Re^2_{N_i}$, соответственно. Это приводит к тождествам (7) и (8) для предельных функций $y(x,t),\theta(x,t)$ при любых $\psi^1(x,t)\in\Re^1_{N_i}$, $\psi^2(x,t)\in\Re^2_{N_i}$. Так как $\bigcup_{N=1}^{\infty}\Re^i_N, i=1,2$ плотны в $W_2^{2,1}(Q)$, а $(y,\theta)\in W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$, то (7) и (8) будут выполняться для (y,θ) при любых

$$(\psi^1,\psi^2)\in W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q), \psi_1(x,T)=0, \psi_2(x,T)=0.$$

Итак, мы доказали, что предельная вектор-функция $(y(x,t),\theta(x,t))$ является обобщенным решением задачи (1) – (5).

Поскольку норма в банаховом пространстве слабо полунепрерывна снизу, то из (16) следует, что для предельной вектор-функции (y,θ) справедлива оценка (9), или, что тоже, неравенство

$$\begin{aligned}\|y\|^2_{W_2^{2,1}(Q)}+\|\theta\|^2_{W_2^{2,1}(Q)}\le C\Big[\|y_0\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|\theta_0\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|y_1\|^2_{L_2(o,l)}+\\ +\|\theta_1\|^2_{L_2(0,l)}+\|a_{1\upsilon}\|^2_{L_\infty(Q)}+\|a_{2\upsilon}\|^2_{L_\infty(Q)}\Big]\forall\upsilon\in U_{ad}.\end{aligned}\tag{22}$$

Единственность решения задачи (1) – (5) следует из того, что функции $f_i(t,x,y,\theta,p,q,\upsilon)$, $i=1,2$ удовлетворяют условию Липшица по (y,θ,p,q). Так как оценка (22) получена равномерно по $\upsilon(x,t)$, то отсюда следует вторая часть утверждения теоремы 1.

§3. Существование оптимального управления в задаче (1) – (6).

<u>Теорема 2.</u> Пусть выполняется «условие А». Тогда в задаче (1) – (6) существует оптимальное управление.

Доказательство. Обозначим через γ нижнюю грань функционала $J(\upsilon)$ в множестве U_{dd}:

$$\gamma=\inf_{\upsilon\in U_{ad}}J(\upsilon).$$

Из условия $U_{ad}\ne\varnothing$ следует, что $\gamma<+\infty$. Покажем, что $\gamma>-\infty$. Предположим, что $\{\upsilon_k(x,t)\}\in U_{dd}$ – минимизирующая последовательность допустимых управлений. Через $(y_k(x,t),\theta_k(x,t))$ обозначим решение задачи (1) – (5), соответствующее $\upsilon_k(x,t)$. Тогда

$$\gamma=\lim_{k\to\infty}J(\upsilon_k)=\lim_{k\to\infty}\iint\limits_Q f_0\left(x,t,y_k(x,t),\theta_k(x,t),\frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x},\frac{\partial\theta_k(x,t)}{\partial x},\upsilon_k(x,t)\right)dxdt.$$

Поскольку в силу доказанной теоремы 1

$$\|y_k\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\theta_k\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le const,$$

то из последовательности $\{\upsilon_k(x,t)\}$ можно выделить такую последовательность (ее тоже обозначим через $\{\upsilon_k(x,t)\}$), что

$$y_k \to y_0, \theta_k \to \theta_0 \quad \text{слабо в } W_2^{2,1}(Q) \quad \text{при } k \to \infty \,. \tag{23}$$

Тогда по теоремам о компактности вложений $[9]$ при $k \to \infty$ имеем

$$y_k \to y_0, \theta_k \to \theta_0 \quad \text{равномерно в } C(\overline{Q}), \tag{24}$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial x} \to \frac{\partial y_0}{\partial x}, \frac{\partial \theta_k}{\partial x} \to \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \quad \text{сильно в } L_2(Q). \tag{25}$$

Из условий, налагаемых на функции $f_0(t,x,y,\theta,p,q,\upsilon)$, и из условия $\|y_k\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\theta_k\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le const$ следует, что $-\infty < \gamma < +\infty$. Далее из (25) следует, что последовательность $\left\{\left(\frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_k(x,t)}{\partial x}\right)\right\}$ при $k \to \infty$ сходится по мере к вектор-функции $\left(\frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x}\right)$. Следовательно, можно выделить такую подпоследовательность (ее тоже обозначим через $\left\{\left(\frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_k(x,t)}{\partial x}\right)\right\}$), что при $k \to \infty$

$$\frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x} \to \frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_k(x,t)}{\partial x} \to \frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x} \quad \text{почти всюду в } Q.$$

Из условий, налагаемых на $f_i(t,x,y,\theta,p,q,\upsilon)$, $i = 1,2$ получается, что последовательность $\left\{\left(f_1\left(t,x,y_k,\theta_k,\frac{\partial y_k}{\partial x},\frac{\partial \theta_k}{\partial x},\upsilon_k\right), f_2\left(t,x,y_k,\theta_k,\frac{\partial y_k}{\partial x},\frac{\partial \theta_k}{\partial x},\upsilon_k\right)\right)\right\}$ ограничена в $L_2(Q)\times L_2(Q)$ и можно считать, что при $k \to \infty$

$$f_i\left(x,t,y_k(x,t),\theta_k(x,t),\frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_k(x,t)}{\partial x},\upsilon_k(x,t)\right) \to z_i(x,t), i = 1,2 \tag{26}$$

слабо в $L_2(Q)$.

Тогда по теореме Мазура $[10]$ можно построить такую выпуклую комбинацию

$$\Phi_s(x,t) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} \begin{pmatrix} f_1\left(x,t,y_{n_s+m}(x,t),\theta_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},\upsilon_{n_s+m}(x,t)\right) \\ f_2\left(x,t,y_{n_s+m}(x,t),\theta_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},\upsilon_{n_s+m}(x,t)\right) \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$\left(\alpha_{ms} \geq 0, \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} = 1\right)$, что она при $s \to \infty$ сильно сходится к $\begin{pmatrix} z_1(x,t) \\ z_2(x,t) \end{pmatrix}$ в $L_2(Q) \times L_2(Q)$ (вообще говоря, n зависит от s). Отсюда следует, что имеется такая последовательность $\{\Phi_s(x,t)\}$, что она при $s \to \infty$ сходится к $\begin{pmatrix} z_1(x,t) \\ z_2(x,t) \end{pmatrix}$ почти всюду в Q.

Положим

$$\lambda_s(x,t) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} f_0\left(x,t,y_{n_s+m}(x,t), \theta_{n_s+m}(x,t), \frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x}, \upsilon_{n_s+m}(x,t)\right) \quad (28)$$

и обозначим $\underline{\lim}_{s\to\infty} \lambda_s(x,t) = z_0(x,t)$. Из условий, налагаемых на функцию $f_0(t,x,y,\theta,p,q,\upsilon)$ следует, что $z_0(x,t)$ интегрируема и конечна почти всюду в Q. По лемме Фату $[11]$ ясно, что

$$\iint_Q z_0(x,t)dxdt \leq \underline{\lim}_{s\to\infty} \iint_Q \lambda_s(x,t)dxdt = \underline{\lim}_{s\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} \iint_Q f_0\left(x,t,y_{n_s+m}(x,t), \theta_{n_s+m}(x,t), \frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x}, \upsilon_{n_s+m}(x,t)\right) dxdt = \underline{\lim}_{s\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} J\left(\upsilon_{n_s+m}\right).$$

С другой стороны, из равенства

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} J(\upsilon_k) = \lim_{k\to\infty} J(\upsilon_k) = \lim_{k\to\infty} \iint_Q f_0\left(x,t,y_k(x,t), \theta_k(x,t), \frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_k(x,t)}{\partial x}, \upsilon_k(x,t)\right) dxdt = \gamma$$

получаем

$$\underline{\lim}_{s\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} J(\upsilon_{n_s+m}) = \underline{\lim}_{s\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} \iint_Q f_0\left(x,t,y_{n_s+m}(x,t), \theta_{n_s+m}(x,t), \frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x}, \upsilon_{n_s+m}(x,t)\right) dxdt = \gamma .$$

Значит

$$\iint_Q z_0(x,t)dxdt \leq \gamma . \quad (29)$$

Теперь покажем, что

$\left(z_0(x,t), z_1(x,t), z_2(x,t)\right) \in R^+\left(x,t,y_0(x,t), \theta_0(x,t), \frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x}\right)$. Обозначим через Q_1 множество точек $(x,t) \in Q$, для которых $z_0(x,t)$ конечно при $s \to \infty$

$\Phi_s(x,t) \to \begin{pmatrix} z_1(x,t) \\ z_2(x,t) \end{pmatrix}$ и при $k \to \infty$

$\frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x} \to \frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_k(x,t)}{\partial x} \to \frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x}$.

Ясно, что $mesQ_1 = mesQ$. Для каждого k определим множество

$$E_k = \{(x,t) | (x,t) \in Q, \upsilon_k(x,t) \overline{\in} [\alpha, \beta]\}.$$

По определению допустимых управлений $mesE_k = 0, k = 1,2,...$. Пусть

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, Q_2 = \{(x,t) | (x,t) \in Q, (x,t) \overline{\in} E\}, Q_0 = Q_1 \cap Q_2.$$

Ясно, что $mesQ_0 = mesQ$. Предположим, что $(x,t) \in Q_0$. Поскольку $\varliminf_{s\to\infty} \lambda_s(x,t) = z_0(x,t)$, то имеется такая подпоследовательность (обозначим ее тоже через $\{\lambda_s(x,t)\}$), что для $\{\lambda_s(x,t)\}$ и для соответствующей подпоследовательности $\{\Phi_s(x,t)\}, \Phi_s(x,t) \to \begin{pmatrix} z_1(x,t) \\ z_2(x,t) \end{pmatrix}$ при $s \to \infty$.

Из

$$y_k(x,t) \to y_0(x,t), \theta_k(x,t) \to \theta_0(x,t), \frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x} \to \frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_k(x,t)}{\partial x} \to \frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x}$$

при $k \to \infty$, следует, что для любого $\delta > 0$ существует такое $k_0(\delta) > 0$, это при $k > k_0$

$$|y_k(x,t) - y_0(x,t)| < \delta, |\theta_k(x,t) - \theta_0(x,t)| < \delta,$$

$$\left|\frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x}\right| < \delta, \left|\frac{\partial \theta_k(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x}\right| < \delta.$$

Тогда для $k > k_0$

$$\left(x,t,y_k(x,t),\theta_k(x,t),\frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_k(x,t)}{\partial x}\right) \in \mathrm{N}\left(x,t,y_0(x,t),\theta_0(x,t),\frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x},\delta\right),$$

где через $\mathrm{N}(x,t,y_0,\theta_0,p_0,q_0,\delta)$ обозначено множество точек (x,t,y,θ,p,q), для которых $|y - y_0| < \delta, |\theta - \theta_0| < \delta, |p - p_0| < \delta, |q - q_0| < \delta$. Поэтому для всех $n_s + m > k_0$

$$\Bigg(f_0\left(x,t,y_{n_s+m}(x,t),\theta_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},\upsilon_{n_s+m}(x,t)\right), f_1\Bigg(x,t,y_{n_s+m}(x,t),$$

$$\theta_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},\upsilon_{n_s+m}(x,t)\Bigg), f_2\Bigg(x,t,y_{n_s+m}(x,t),\theta_{n_s+m}(x,t),$$

$$\frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},\upsilon_{n_s+m}(x,t)\Bigg)\Bigg) \in R^+\left(N\left(x,t,y_0(x,t),\theta_0(x,t),\frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x},\delta\right)\right),$$

где

$$R^{+}(N(x,t,y_0,\theta_0,p_0,q_0,\delta))=\bigcup_{\substack{|y-y_0|<\delta,\\ |\theta-\theta_0|<\delta,\\ |p-p_0|<\delta,\\ |q-q_0|<\delta}}\{R^{+}(x,t,y,\theta,p,q)|(x,t,y,\theta,p,q)\in \mathrm{N}(x,t,y_0,\theta_0,p_0,q_0,\delta)\}.$$

Из (27), (28) следует, что

$$(\lambda_s(x,t),\Phi_s'(x,t))\in coR^{+}\left(N\left(x,t,y_0(x,t),\theta_0(x,t),\frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x},\delta\right)\right),$$

где $(\,'\,)$ означает транспонирование.

Так как при $s\to\infty$ $\lambda_s(x,t)\to z_0(x,t)$, $\Phi_s'(x,t)\to(z_1(x,t),z_2(x,t))$,

$$(z_0(x,t),z_1(x,t),z_2(x,t))\in clcoR^{+}\left(N\left(x,t,y_0(x,t),\theta_0(x,t),\frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x},\delta\right)\right),\forall\delta>0,$$

где через $clcoA$ обозначена выпуклая замкнутая оболочка множества A. Отсюда в силу (Q)- свойства Чезари из $[12,13]$ следует, что

$$(z_0(x,t),z_1(x,t),z_2(x,t))\in R^{+}\left(x,t,y_0(x,t),\theta_0(x,t),\frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x}\right).$$

Тогда по определению множества $R^{+}(t,x,y,\theta,p,q)$, существует такая функция $\upsilon(x,t)$, что она принимает значения из $[\alpha,\beta]$ и

$$z_0(x,t)\ge f_0\left(x,t,y_0(x,t),\theta_0(x,t),\frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x},\upsilon(x,t)\right),$$

$$z_i(x,t)=f_i\left(x,t,y_0(x,t),\theta_0(x,t),\frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x},\upsilon(x,t)\right),i=1,2.$$

Поэтому по обобщенной лемме Филиппова $[14,15]$ имеется такая измеримая функция $\upsilon_0(x,t)$, что $\upsilon_0(x,t)\in[\alpha,\beta]$ и почти всюду в Q

$$z_0(x,t)\ge f_0\left(x,t,y_0(x,t),\theta_0(x,t),\frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x},\upsilon_0(x,t)\right),\qquad(30)$$

$$z_i(x,t)=f_i\left(x,t,y_0(x,t),\theta_0(x,t),\frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x},\upsilon_0(x,t)\right),i=1,2.$$

Покажем, что вектор-функция $(y_0(x,t),\theta_0(x,t))$ является решением задачи $(1)-(5)$, соответствующим управлению $\upsilon_0(x,t)$. По определению обобщенного решения задачи $(1)-(5)$, для любых функций

$$\psi_1(x,t)\in W_2^{2,1}(Q),\psi_2(x,t)\in W_2^{2,1}(Q),\psi_1(0,t)=\psi_2(l,t)=\frac{\partial\psi_1(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi_1(l,t)}{\partial x}=0,$$

$$\psi_1(x,T)=0,\psi_2(0,t)=\psi_2(l,t)=\frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi_2(l,t)}{\partial x}=0,\psi_2(x,T)=0$$

имеют место интегральные тождества

$$\iint\limits_Q \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} \left(EI \frac{\partial^2 y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_1(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \psi_1(x,t)}{\partial t} + \rho Ae \frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \psi_1(x,t)}{\partial t} \right) dxdt -$$

$$- \int_0^l \rho A y_1(x) \psi_1(x,0) dx + \int_0^l \rho Ae \theta_1(x) \psi_1(x,0) dx = \iint\limits_Q \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} f_1 \Big(x, t, y_{n_s+m}(x,t),$$

$$\theta_{n_s+m}(x,t), \frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x}, \upsilon_{n_s+m}(x,t) \Big) \psi_1(x,t) dxdt, \qquad (31)$$

$$\iint\limits_Q \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} \left(EC_\omega \frac{\partial^2 \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_2(x,t)}{\partial x^2} - GC \frac{\partial^2 \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x^2} \psi_2(x,t) + \rho Ae \frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \psi_2(x,t)}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \rho(I + Ae^2) \frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \psi_2(x,t)}{\partial t} \right) dxdt + \int_0^l \rho Ae y_1(x) \psi_2(x,0) dx - \int_0^l \rho(I + Ae^2) \theta_1(x) \psi_2(x,0) dx =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ms} f_2 \left(x, t, y_{n_s+m}(x,t), \theta_{n_s+m}(x,t), \frac{\partial y_{n_s+m}(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_{n_s+m}(x,t)}{\partial x}, \upsilon_{n_s+m}(x,t) \right) \psi_2(x,t) dxdt. \ . \qquad (32)$$

Переходя к пределу в равенствах (31),(32) и учитывая соотношения (23), (24), (25), (26), имеем

$$\iint\limits_Q \left(EI \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial y_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho Ae \frac{\partial \theta_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right) dxdt - \int_0^l \rho A y_1(x) \psi_1(x,0) dx +$$

$$+ \int_0^l \rho A \theta_1(x) \psi_1(x,0) dx = \iint\limits_Q z_1(x,t) \psi_1 dxdt,$$

$$\iint\limits_Q \left(EC_W \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - GC \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} \psi_2 + \rho Ae \frac{\partial y_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \rho(I + Ae^2) \frac{\partial \theta_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right) dxdt + \int_0^l \rho A y_1(x) \psi_1(x,0) dx -$$

$$- \int_0^l \rho(I + Ae^2) \theta_1(x) \psi_2(x,0) dx = \iint\limits_Q z_2(x,t) \psi_2 dxdt.$$

Если здесь учесть соотношение (30), то получим, что $(y_0(x,t), \theta_0(x,t))$ является обобщенным решением задачи $(1)-(5)$, соответствующим управлению $\upsilon_0(x,t)$. Поэтому

$$J(\upsilon_0) \geq \gamma \, . \qquad (33)$$

Выше мы показали, что

$$f_0 \left(x, t, y_0(x,t), \theta_0(x,t), \frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x}, \upsilon_0(x,t) \right) \leq z_0(x,t)$$

Тогда отсюда и учитывая соотношение (29), имеем:

$$J(\upsilon_0) = \iint\limits_Q f_0 \left(x, t, y_0(x,t), \theta_0(x,t), \frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta_0(x,t)}{\partial x}, \upsilon_0(x,t) \right) dxdt \leq \iint\limits_Q z_0(x,t) dxdt \leq \gamma. \quad (34)$$

Из (33) и (34) следует, что $J(\upsilon_0)=\gamma$, т.е. $(y_0(x,t),\theta_0(x,t),\upsilon_0(x,t))$- оптимальная тройка, а $\upsilon_0(x,t)$- оптимальное управление. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975, 480 с.
3. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977, 480 с.
4. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002, 824 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
6. Комков В. Теория оптимального управления демфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975, 158 с.
7. Ишмухаметов А.З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Вычислительный центр РАН. М.: 2001, 120 с.
8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1974, 408 с.
9. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
10. Хилле Э, Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.:ИЛ, 1962, 829 с.
11. Натансон Н.П. Теория функций вещественной переменной. М.:Наука, 1977, 456 с.
12. Berkovitz L.D. Existence and Lower Closure Theorems for Abstract Multidimentional Control Problems. SIAMJ. Control, 1974, 12, No1, p. 210-236.
13. Cesari L. Existence Theorems for Abstract Multidimentional Control Problems. Jour. Opt. Theory and Appl., 1970, No3, p. 210-236.
14. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ, сер.матем., механ., астрон., 1959, 2, №1, с 25-32.
15. Mc Shane E.J. and Warfield R.B. On Filippov Implicit Functions Lemma. Proc. Amer. Math. Soc., 1967, 18, No1, p. 41-47.

ÇÜBUĞUN ƏLAQƏLİ ƏYİLMƏ-BURULMA RƏQSLƏRİNİN ZƏİF QEYRİ-XƏTTİ TƏNLİKLƏRİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

V.B.NƏZƏROVA

XÜLASƏ

İşdə çübuğun əyilmə burulma rəqs tənlikləri üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılır, belə ki, rəqs tənlikləri iki dörd tərtibli diferensial tənlikdən ibarətdir. Baxılan sərhəd məsələsinin həllinin varlığı, yeganəliyi və optimal idarədicinin varlığı teoremi isbat edilir.

Açar sözlər: optimal idarəedici, çubuq, əyilmə-burulma rəqsləri

OPTIMAL CONTROL PROBLEM RELATED TO WEAK NON-LINEAR EQUATION OF THE TORSION-FUNCTIONAL VIBRATIONS OF BAR

V.B.NAZAROVA

SUMMARY

In the work the optimal control problem related to the torsion-flectional vibrations of bar is considered. The vibration equations consist of two forth order differential equations. The theorems on existence and uniqueness of the solution of the considered boundary problem, and existence of the optimal control are proved.

Key words: optimal control, bar, torsion-flectional vibrations

Поступила в редакцию: 20.08.2014 г.
Подписано к печати: 04.07.2014 г.